66-819

פתרון ממ״ן 1

1. א.

$$(AB)C = \left(\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 16 & 10 \\ -9 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 42 \\ -9 & -22 \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 42 \\ -9 & -22 \end{pmatrix}$$

ב.

$$A(B+C) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 19 \\ -11 & -5 \end{pmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} 16 & 10 \\ -9 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 19 \\ -11 & -5 \end{pmatrix}$$

ג.

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61 & 11 \\ -39 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 62 & 18 \\ -37 & 1 \end{pmatrix}$$

ב.

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}{5 \cdot 3 - (-1)(-2)} = \begin{pmatrix} 3/13 & 1/13 \\ 2/13 & 5/13 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}{3 \cdot 0 - 2(-1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{1 \cdot 1 - (-2) 0} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & 10 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}}{16 \cdot (-4) - 10(-9)} = \begin{pmatrix} -4/26 & -10/26 \\ 9/26 & 16/26 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/13 & 1/13 \\ 2/13 & 5/13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/13 & -5/13 \\ 9/26 & 16/26 \end{pmatrix}$$

2. א. נחשב עקבה את C ונחשב עקבה את D.

$$\operatorname{trace} C = \operatorname{trace} \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = 9 + (-5) = 4$$

$$\operatorname{trace} D = \operatorname{trace} \begin{pmatrix} -9 & -5 & -9 \\ 8 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} = -9 + 4 + 9 = 4$$

$\boxed{k}$ 3

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}(1\cdot2-1\cdot1) & (-1)^{1+2}(0.2-1.1) & (-1)^{1+3}(0.1-1.1) \\ (-1)^{2+1}(1\cdot2-1\cdot1) & (-1)^{2+2}(1\cdot2-1\cdot1 & (-1)^{2+3}(1\cdot1-1\cdot1) \\ (-1)^{3+1}(1\cdot1-1\cdot1) & (-1)^{3+2}(1\cdot1-1\cdot0) & (-1)^{3+3}(1\cdot1-1\cdot0) \end{pmatrix}}{(-1)^{2+1}\cdot0\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot1\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\cdot1\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 10 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ב. חשב בדטרמיננטה לפי עמודה 2

$\det(A-B)=0$

$A-B$ הינה סינגולרית

ג.

$$A+B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A+B) = (-1)^{1+1}\cdot6\cdot(2\cdot4-2\cdot2) + (-1)^{1+2}\cdot2\,(1\cdot4-2\cdot3) + (-1)^{1+3}\cdot1\cdot(1\cdot2-2\cdot3)$$
$$= 24$$

$A+B$ רגולרית

4. א.

$$B = AA' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = A'A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

ב.

$$B^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}}{10 \cdot 2 - (-3)(-3)} = \begin{pmatrix} 2/11 & 3/11 \\ 3/11 & 10/11 \end{pmatrix}$$

ג.

$$C^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 9 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}'}{(-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot (0 \cdot 10 - (-3) \cdot 1) + (-1)^{2+2} \cdot 1 (1 \cdot 10 - (-3)(-3)) + (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0(-3))}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 9 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{0}$$

C היא מטריצה סינגולרית, שהרי הדטרמיננטה שלה שווה לאפס.

.5 .א

$$\det(A) = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot (4\cdot 5 - 4\cdot 3)$$
$$+ (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot (3\cdot 5 - 4\cdot 2)$$
$$+ (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot (3\cdot 3 - 4\cdot 2)$$
$$= -8 + 7 - 1 = -2$$

$$\det(B) = (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot (5\cdot 2 - (-3)\cdot 1) = 13$$

לפי שורה 3

.ב

$$\det(AB) = \det\begin{pmatrix} 19 & -1 & 17 \\ 6 & -1 & 5 \\ 13 & 0 & 14 \end{pmatrix} = -26$$

$$\det(BA) = \det\begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix} 18 & 26 & 32 \\ 7 & 9 & 11 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = -26$$

.k. 6

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Ax = \lambda x$$

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda)(-2-\lambda) - 2 \cdot 0 = 0$$

$$\lambda_1 = -1$$
$$\lambda_2 = -2$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 4 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(10-\lambda) - 2 \cdot 4 = 0$$

$$\lambda_1 = 11$$
$$\lambda_2 = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1)^{3+3} \cdot (6-\lambda)((5-\lambda)(2-\lambda) - 4) = 0$$

$$\lambda_1 = 6$$
$$\lambda_2 = 6$$
$$\lambda_3 = 1$$

ב. הוקטורים העצמיים של A עבור $\lambda=-1$

$$Ax=\lambda x$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1x_1+2x_2\\ 0x_1-2x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x_1\\ -x_2\end{pmatrix}$$

$$-1x_1+2x_2=-x_1 \longrightarrow x_2=0$$

$$-2x_2=-x_2 \longrightarrow x_2=0$$

הוקטורים העצמיים הם $\begin{pmatrix}x_1\\ 0\end{pmatrix}$

הוקטורים העצמיים של A עבור $\lambda=-2$

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

$$-1x_1+2x_2=-2x_1$$

$$0x_1-2x_2=-2x_2 \longrightarrow x_1=-2x_2$$

הוקטורים העצמיים הם $\begin{pmatrix}-2x_2\\ x_2\end{pmatrix}$

הוקטורים העצמיים של B עבור $\lambda=11$ $\begin{pmatrix}4x_2\\ x_2\end{pmatrix}$

ועבור $\lambda=2$ $\begin{pmatrix}-2x_2\\ x_2\end{pmatrix}$

הוקטורים העצמיים של C עבור $\lambda=6$ $\begin{pmatrix}x_1\\ \frac{1}{2}x_1\\ x_3\end{pmatrix}$

ועבור $\lambda=1$ $\begin{pmatrix}x_1\\ -2x_1\\ 0\end{pmatrix}$

$\det A = 2$ $\qquad$ ·c

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = (-1)(-2) = 2$

$\det B = 22$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 11 \cdot 2 = 22$

$\det C = (-1)^{3+3} \cdot 6 (5 \cdot 2 - 2 \cdot 2) = 36$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 6 \cdot 6 \cdot 1 = 36$

$\text{trace}(A) = (-1) + (-2) = -3$ $\qquad$ .3

$\lambda_1 + \lambda_2 = (-1) + (-2) = -3$

$\text{trace}(B) = 3 + 10 = 13$

$\lambda_1 + \lambda_2 = 11 + 2 = 13$

$\text{trace}(C) = 5 + 2 + 6 = 13$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 6 + 6 + 1 = 13$

7. לדוגמא, עבור $x_1=-10,\ x_2=5$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1\cdot(-10)^2 + 4(-10)\cdot 5 + 3\cdot 5^2 < 0$$

8.
$$q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$$
$$= (x_1+x_2)^2 + x_2^2 > 0 \quad \text{לכל } x\neq 0$$

9. א.

$$1.\ \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$2.\ \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$3.\ \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2.5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2.5 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

ב.

$$1.\ 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$2.\ 2\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$3.\ 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2.5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2.5 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

1. $\text{trace } b'Ab = b_1^2 + 4b_1b_2 + 3b_2^2$ .2

$$bb'A = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} (b_1 \quad b_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1b_1^2 + 2b_1b_2 & 2b_1^2 + 3b_1b_2 \\ b_2b_1 + 2b_2^2 & 2b_2b_1 + 3b_2^2 \end{pmatrix}$$

$\text{trace } bb'A = b_1^2 + 4b_1b_2 + 3b_2^2$

2. $\text{trace } b'Ab = 5b_1^2 + 4b_1b_2 + b_2^2$

$\text{trace } bb'A = \text{trace} \left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} (b_1 b_2) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right] = 5b_1^2 + 4b_1b_2 + b_2^2$

3. $\text{trace } b'Ab = \text{trace } bb'A = b_1^2 + 2b_2^2 + 3b_3^2 + 4b_1b_2 + 5b_1b_3 + 6b_2b_3$

$A \cdot A = A$

.10

$$\frac{\partial z}{\partial \beta} = (-y'X)' + \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot (X'X)\beta = -X'y + (X'X)\beta$$ .11

$$\frac{\partial z}{\partial \beta} = 0 \longrightarrow -X'y + (X'X)\beta = 0$$

$$(X'X)\beta = X'y$$

$$\beta = (X'X)^{-1} X'y$$

— 10 —