פתרון תרגיל 2

פתרון שאלה 1

א. $\hat{Y} = 1700 - 0.7X$ והשיפוע הוא 0.7

ב. $\hat{Y} = 1.16X$ והשיפוע הוא 1.16

פתרון שאלה 2

ב. $\hat{Y} = 2 + 0.6X$

ג+ד+ה.

Y	X	$\hat{Y}$	e	H
8	10	8	0	2
7	8	6.8	0.2	1
9	11	8.6	0.4	2
7	9	7.4	-0.4	2
9	12	9.2	-0.2	3

ו. $\bar{e} = 0$

1. $\sum e_i = 0$ $\quad \sum e_i X_i = 0$!

3. $\bar{Y} = \bar{\hat{Y}} = 8$

ח. נכון

ט. $\hat{H} = -2 + 0.4X$

י. סכום החותכים שווה לאפס

סכום השיפועים שווה לאחד

מקדמי המתאם הם: $r^2_{YH} = 0.5$ $\quad r^2_{XH} = 0.8$ $\quad r^2_{XY} = 0.9$

$r^2_{XH} \neq r^2_{XY}$ כי H איננו טרנספורמציה ליניארית של Y.

שימו לב, ש- $r^2_{\hat{Y}\hat{H}} = 1$.

פתרון שאלה 3
פתרון שאלה 4 } קיימת בספר (1)-(7)

פתרון שאלה 5

$$Y_i = 7 + \beta X_i + u_i \quad \Rightarrow \quad Y_i - 7 = \beta X_i + u_i$$

$$\hat{\beta}_{OLS} = \frac{\sum (Y_i - 7) X_i}{\sum X_i^2}$$

$$E(\hat{\beta}_{OLS}) = E\left(\frac{\sum (Y_i-7)X_i}{\sum X_i^2}\right) = \frac{E\left(\sum(\beta X_i + u_i)X_i\right)}{\sum X_i^2} =$$

$$= \frac{E\left(\beta \sum X_i^2 + \sum u_i X_i\right)}{\sum X_i^2} =$$

$$= \frac{\beta \sum X_i^2 + 0}{\sum X_i^2} = \beta$$ א.ח.ה.

$$V(\hat{\beta}_{OLS}) = V\left(\frac{\sum(Y_i - 7)X_i}{\sum X_i^2}\right) = \frac{V\left(\sum(\beta X_i + u_i)X_i\right)}{(\sum X_i^2)^2} =$$

$$= \frac{V\left(\overset{\text{קבוע}}{\cancel{\sum \beta X_i^2}} + \sum u_i X_i\right)}{(\sum X_i^2)^2} = \frac{V(u_1 X_1 + u_2 X_2 + \dots + u_n X_n)}{(\sum X_i^2)^2}$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sum X_i^2}$$

פתרון שאלה 6

1. נכון
2. נכון
3. לא נכון
4. לא נכון
5. לא נכון
6. לא נכון
7. נכון
8. נכון
9. לא נכון
10. לא נכון

פתרון תרגיל 2 - 293

מבוא לאקונומטריקה א'

תרגיל 2

שאלה 3

הניחו שהצריכה השנתית Y_t תלויה בהכנסה השנתית X_t בהתאם למודל: $Y_t = \alpha + \beta \cdot X_t + u_t$ כאשר u הוא משתנה מקרי והמודל מקיים את ההנחות הסטטיסטיות הקלאסיות. על מנת לאמוד את הנטייה השולית לצרוך β נלקח מדגם מקרי של N תצפיות והוצעו האומדנים הבאים:

1. $$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$
2. $$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum XY}{\sum X^2}$$
3. $$\hat{\beta}_3 = \frac{\overline{Y}}{\overline{X}}$$
4. $$\hat{\beta}_4 = \frac{Y_N - Y_1}{X_N - X_1}$$
5. $$\hat{\beta}_5 = \frac{1}{N-1} \sum_{t=2}^{N} \frac{Y_t - Y_{t-1}}{X_t - X_{t-1}}$$
6. $$\hat{\beta}_6 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \frac{Y_t}{X_t}$$

א. הסבירו את משמעות כל אחד מהאומדנים.

ב. חשבו לכל אומדן את התוחלת ואת השונות.

ג. בדקו לכל אומדן האם הוא ליניארי ואם הוא חסר הטיה.

ד. איזה אומדן הוא בעל השונות המינימלית?

ה. מי מהאומדנים הוא אומדן BLUE?

מבוא לאקונומטריקה א.
פתרון תרגיל 2

פתרון שאלה 3

1. $\hat{\beta}$ הוא אומד בריבועים הפחותים ל-β. שיטה זו פועלת למינימום את סכום הטעויות בריבוע, Σe_i^2.

$$E(\hat{\beta}_1)=E\left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}\right)=\frac{E(\Sigma x(\alpha+\beta X_i+u_i))}{\Sigma x^2}=$$

$$=\frac{E(\alpha\Sigma x_i+\beta\Sigma x_i^2+\Sigma x_i u_i)}{\Sigma x^2}=$$

$$=\frac{0+\beta\Sigma x_i^2+\cancel{\Sigma x_i E(u_i)}}{\Sigma x^2}=\beta$$

$$V(\hat{\beta}_1)=V\left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}\right)=\frac{V(\Sigma x(\alpha+\beta X_i+u_i))}{(\Sigma x^2)^2}=$$

$$=\frac{V(\alpha\Sigma x_i+\beta\Sigma x_i^2+\Sigma x_i u_i)}{(\Sigma x^2)^2}=$$

$$=\frac{V(\Sigma x_i u_i)}{(\Sigma x^2)^2}=\frac{\Sigma x_i^2 \overset{\sigma^2}{V(u_i)}+2\sum_i\sum_{j\neq i} x_i x_j \overset{0}{\cancel{cov(u_i,u_j)}}}{(\Sigma x^2)^2}$$

$$=\frac{\sigma^2\Sigma x_i^2}{(\Sigma x^2)^2}=\frac{\sigma^2}{\Sigma x^2}$$

האומד ליניארי:

$$\hat{\beta}_1=\frac{\Sigma xY}{\Sigma x^2}=\frac{x_1}{\Sigma x^2}Y_1+\frac{x_2}{\Sigma x^2}Y_2+\dots+\frac{x_n}{\Sigma x^2}Y_n$$

האומד חסר הטיה $E(\hat{\beta}_1)=\beta$

לכן האומד נאמן מסקנה, כי האומד הוא בעל השונות המינימלית מבין כל האומדים הליניאריים וחסרי ההטיה.

רק אם נניח שכל ההנחות המלאות שלהם הם ליניאריים וחסרי הטיה, אזי $\hat{\beta}$ הוא בעל שונות המינימלית.

$\hat{\beta}$ הוא אומד BLUE ל-β, זו מסקנה מסקנה.

2. $\hat{\beta}_2$ הוא אומד הריבועים הפחותים ל-β במודל $Y=\beta X+u$.
כך שמקדם החותך הוצא משוואת הנגזרות והבאו למינימום את סכום הטעות הריבועית.

$$E(\hat{\beta}_2)=\frac{\alpha\sum X}{\sum X^2}+\beta \qquad V(\hat{\beta}_2)=\frac{\sigma^2}{\sum X^2}$$

האומד לינארי:

$$\hat{\beta}_2=\frac{\sum XY}{\sum X^2}=\frac{X_1}{\sum X^2}Y_1+\frac{X_2}{\sum X^2}Y_2+\dots+\frac{X_n}{\sum X^2}Y_n$$

האומד מוטה. גודל ההטיה $E(\hat{\beta}_2)-\beta=\frac{\alpha\sum X}{\sum X^2}$

השונות של אומד זה קטנה מהשונות של $\hat{\beta}_1$
כיון ש $\sum X^2>\sum x^2$ [כי השוויון $\sum x^2=\sum X^2-n\bar{X}^2$]
$\hat{\beta}_2$ אינו האומד BLUE ל-β במודל $Y=\alpha+\beta X+u$
כיון שהוא מוטה.

3. $\hat{\beta}_3$ הוא שיפוע הקו היוצא מראשית הצירים ועובר דרך הנקודה $(\bar{X},\bar{Y})$.

$$E(\hat{\beta}_3)=\frac{\alpha}{\bar{X}}+\beta \qquad V(\hat{\beta}_3)=\frac{\sigma^2}{n\bar{X}^2}$$

האומד לינארי:

$$\hat{\beta}_3=\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}=\frac{\sum Y}{\sum X}=\frac{1}{\sum X}Y_1+\dots+\frac{1}{\sum X}Y_n$$

האומד מוטה. גודל ההטיה $\frac{\alpha}{\bar{X}}$.

שונות האומד גדולה משל $\hat{\beta}_2$,
כיון ש $\sum X^2>n\bar{X}^2$ [כי השוויון $\sum x^2=\sum X^2-n\bar{X}^2$]
הוא אינו האומד BLUE כיון שהוא מוטה.

4. $\hat{\beta}_4$ הוא שיפוע הקו העובר דרך שתי הנקודות (X_1, Y_1) ו-(X_n, Y_n).

$$E(\hat{\beta}_4) = E\left(\frac{\cancel{\alpha} + \beta X_n + u_n - \cancel{\alpha} - \beta X_1 - u_1}{X_n - X_1}\right) =$$

$$= \frac{\beta (X_n - X_1)}{X_n - X_1} = \beta$$

$$V(\hat{\beta}_4) = \frac{V(\cancel{\alpha} + \beta X_n + u_n - \cancel{\alpha} - \beta X_1 - u_1)}{(X_n - X_1)^2} =$$

$$= \frac{V(u_n - u_1)}{(X_n - X_1)^2} = \frac{V(u_n) + V(u_1) - 2\,cov(u_n, u_1)}{(X_n - X_1)^2}$$

$$= \frac{\sigma^2 + \sigma^2 - 0}{(X_n - X_1)^2} = \frac{2\sigma^2}{(X_n - X_1)^2}$$

$$\hat{\beta}_4 = \frac{X_n}{X_n - X_1} Y_n - \frac{X_1}{X_n - X_1} Y_1$$

זהו אומדן לינארי

זהו אומדן ח.ה. ל-β.

כיון שהוא אומדן לינארי ואומדן חסר הטיה, הרי

השונות שלו גדולה מהשונות של $\hat{\beta}_1$ (לפי גאוס-מרקוב).

הוא אומדן BLUE כיון שהשונות שלו היא מינימלית

4

5. $\hat{\beta}_5$ הוא ממוצע של שיפוע מיתרים שבין כל שתי נקודות עוקבות במדגם.

(יש לנו N נקודות. יש $N-1$ זוגות של נקודות עוקבות,
פעם (X_1,Y_1) ו-(X_2,Y_2), פעם (X_2,Y_2) ו-(X_3,Y_3)
עד פעם (X_{N-1},Y_{N-1}) ו-(X_N,Y_N)).

$$E(\hat{\beta}_5) = \frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{N} E\left(\frac{Y_t - Y_{t-1}}{X_t - X_{t-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{N} \frac{E(\alpha+\beta X_t + u_t - \alpha - \beta X_{t-1} - u_{t-1})}{X_t - X_{t-1}}$$

$$= \frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{N} \beta = \frac{1}{N-1}\cdot(N-1)\beta = \beta$$

$$V(\hat{\beta}_5) = \left(\frac{1}{N-1}\right)^2 V\left(\frac{Y_2-Y_1}{X_2-X_1} + \frac{Y_3-Y_2}{X_3-X_2} + \frac{Y_4-Y_3}{X_4-X_3} + \dots\right)$$

$$= \left(\frac{1}{N-1}\right)^2 \Bigg[V\left(\frac{Y_2-Y_1}{X_2-X_1}\right) + V\left(\frac{Y_3-Y_2}{X_3-X_2}\right) + V\left(\frac{Y_4-Y_3}{X_4-X_3}\right) + \dots$$

$$+ 2\operatorname{cov}\left(\frac{Y_2-Y_1}{X_2-X_1}, \frac{Y_3-Y_2}{X_3-X_2}\right) + 2\operatorname{cov}\left(\frac{Y_2-Y_1}{X_2-X_1}, \frac{Y_4-Y_3}{X_4-X_3}\right) + \dots\Bigg]$$

$V(Y_t) = V(\alpha+\beta X_t + u_t) = V(u_t) = \sigma^2$ ע"פ ההנחות

$$\operatorname{cov}(Y_t, Y_{t-1}) = \operatorname{cov}(\alpha+\beta X_t + u_t,\ \alpha+\beta X_{t-1} + u_{t-1}) = \operatorname{cov}(u_t, u_{t-1}) = 0$$

$$\operatorname{cov}(Y_t, Y_t) = \operatorname{cov}(\alpha+\beta X_t + u_t,\ \alpha+\beta X_t + u_t) = \operatorname{cov}(u_t, u_t) = \sigma^2$$

$$V(Y_t - Y_{t-1}) = V(Y_t) + V(Y_{t-1}) - 2\operatorname{cov}(Y_t, Y_{t-1}) = 2\sigma^2$$

$$V\left(\frac{Y_t - Y_{t-1}}{X_t - X_{t-1}}\right) = \frac{2\sigma^2}{(X_t - X_{t-1})^2}$$

$$\operatorname{cov}\left(\frac{Y_2-Y_1}{X_2-X_1}, \frac{Y_3-Y_2}{X_3-X_2}\right) = \frac{\operatorname{cov}(Y_2,Y_3) - \operatorname{cov}(Y_2,Y_2) - \operatorname{cov}(Y_1,Y_3) + \operatorname{cov}(Y_1,Y_2)}{(X_2-X_1)(X_3-X_2)} = \frac{-\sigma^2}{(X_2-X_1)(X_3-X_2)}$$

$$\operatorname{cov}\left(\frac{Y_2-Y_1}{X_2-X_1}, \frac{Y_4-Y_3}{X_4-X_3}\right) = 0$$

$$V\left(\hat{\beta}_5\right)=\left(\frac{1}{N-1}\right)^2\left[\frac{2\sigma^2}{(X_2-X_1)^2}+\frac{2\sigma^2}{(X_3-X_2)^2}+\frac{2\sigma^2}{(X_4-X_3)^2}+\dots\right.$$

$$-2\frac{\sigma^2}{(X_2-X_1)(X_3-X_2)}+0+\dots$$

$$-2\frac{\sigma^2}{(X_3-X_2)(X_4-X_3)}+0+\dots$$

$$\vdots$$

$$\left.-2\frac{\sigma^2}{(X_{T-1}-X_{T-2})(X_T-X_{T-1})}\right]$$

$$=\frac{2\sigma^2}{(N-1)^2}\left[\sum_{t=2}^{N}\frac{1}{X_t-X_{t-1}}-\sum_{t=2}^{N-1}\frac{1}{(X_t-X_{t-1})(X_{t+1}-X_t)}\right]$$

כמו שאמרנו לעיל, השונות תלויה גם ב-Y-ים ובמקדמים
הקבועים.

כמו שאמרנו לעיל במקרה הזה [illegible]
בשונה מאשר ב-$\hat{\beta}_1$.

לכן אינו BLUE, כי [illegible].

⑥

6. $\hat{\beta}_6$ הוא ממוצע של היחסים N יחסים,
אומד 6 לא יהיה מוטה ולכן
רק אם α שווה אפס.

$$E(\hat{\beta}_6) = \frac{1}{N}\sum \frac{E(Y_t)}{X_t}$$

$$= \frac{1}{N}\sum \frac{\alpha+\beta X_t}{X_t} = \frac{1}{N}\sum \frac{\alpha}{X_t} + \frac{1}{N}\sum \beta$$

$$= \frac{\alpha}{N}\sum \frac{1}{X_t} + \beta$$

$$V(\hat{\beta}_6) = \left(\frac{1}{N}\right)^2 V\left(\frac{Y_1}{X_1} + \frac{Y_2}{X_2} + \dots \frac{Y_n}{X_n}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{N}\right)^2 \left[V\left(\frac{Y_1}{X_1}\right) + V\left(\frac{Y_2}{X_2}\right) + \dots 2\mathrm{cov}\left(\frac{Y_1}{X_1}, \frac{Y_2}{X_2}\right) + \dots \right]$$

$$= \left(\frac{1}{N}\right)^2 \cdot \left[\frac{\sigma^2}{X_1^2} + \frac{\sigma^2}{X_2^2} + \dots + 2 \cdot 0 + \dots \right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{N^2} \sum \frac{1}{X_t^2}$$

כפי שאמרנו לעיל, השונות של Y-ים משתנים במדגם.
כיון שהוא אומד מוטה, אינו יכול אף לעמוד בתנאי של
קשה לי להשוות אותו לשאר האומדים הקודמים.

האומד הזה אינו BLUE כיון שהוא מוטה.

פתרון שאלה 2:
עבור המודל $Y = \beta X + u$
ל-6 האומדים אלו, השונות של $\hat{\beta}_2$ היא המינימלית.
כפי שאמרנו האומדים הקודמים יכולים להיות כך,
ולכן השונות הנמוכה ביותר אינו BLUE במודל זה.

7